CHUYÊN ĐỀ 1: CÁCH NHẬN BIẾT MỘT HÌNH

1. Kiến thức cơ bản:

1.1. Tam giác cân:

Các phương pháp chứng minh tam giác cân:

Phương pháp 1: Tam giác có hai cạnh bằng nhau là tam giác cân.

Phương pháp 2: Tam giác có hai góc bằng nhau là tam giác cân.

Phương pháp 3: Tam giác có một đường cao vừa là đường trung tuyến, đường trung trực, đường phân giác của một góc và ngược lại thì tam giác đó là tam giác cân.

Lứu ý: Có thể chứng minh một tam giác là tam giác cân dựa vào các biểu thức hoặc các hệ thức đã được chứng minh.

1.2. Tam giác đều:

Các phương pháp chứng minh tam giác đều:

Phương pháp 1: Tam giác có ba cạnh bằng nhau là tam giác đều.

Phương pháp 2: Tam giác có ba góc bằng nhau và bằng 600 là tam giác đều.

Phương pháp 3: Tam giác cân có số đo góc ở đỉnh cân bằng 600 là tam giác đều.

Phương pháp 4: Tam giác có các đường cao vừa là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực và ngược lại là tam giác đều.

1.3. Tam giác vuông:

Các phương pháp chứng minh tam giác vuông:

Phương pháp 1: Tam giác có một góc vuông là tam giác vuông.

Phương pháp 2: Tam giác có hai cạnh nằm trên hai đường thẳng vuông góc là tam giác vuông.

Phương pháp 3: Sử dụng định lý đảo về đường trung tuyến của tam giác vuông.

Định lý: Trong một tam giác có đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền thì tam giác đó là tam giác vuông.

Phương pháp 4: Sử dụng định lý đảo của định lý Pitago.

Định lý: Nếu một tam giác thỏa mãn bình phương một cạnh bằng tổng bình phương hai cạnh còn lại thì tam giác đó là tam giác vuông.

Tức là, nếu $BC^2 = AB^2 + AC^2$ thì tam giác ABC vuông tại A.

Phương pháp 5: Tam giác nội tiếp đường tròn có một cạnh là đường kính thì tam giác đó là tam giác vuông.

1.4. Tam giác vuông cân:

Các phương pháp chứng minh tam giác vuông cân:

Phương pháp 1: Tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau là tam giác vuông cân.

Phương pháp 2: Tam giác vuông có một góc nhọn bằng 45^0 là tam giác vuông cân.

Phương pháp 3: Tam giác cân có số đo một góc ở đáy bằng 45^0 là tam giác vuông cân.

1.5. Hình thang, hình thang cân, hình thang vuông:

Diện tích hình thang:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD).AH$$

Tính chất:

Định lý 1: Trong hìn thang cân, hai cạnh bên bằng nhau.

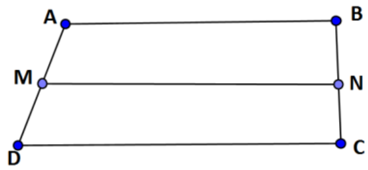
Định lý 2: Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau.

Định lý 3: Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

Đường trung bình của hình thang: Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.

Định lý 1:

Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.



Định lý 2:

Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

$$MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

Phương pháp chứng minh hình thang:

Phương pháp 1: Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.

Phương pháp chứng minh hình thang vuông:

Phương pháp 1: Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.

Phương pháp chứng minh hình thang cân:

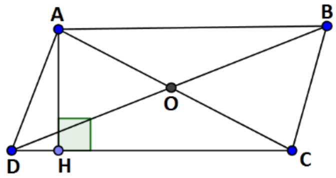
Phương pháp 1: Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

Phương pháp 2: Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

Phương pháp 3: Hình thang cân là hình thang có hai đường chéo bằng nhau.

1.6. Hình bình hành:

Định nghĩa: Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.



Diện tích hình bình hành:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(AH + CD\right) = \frac{1}{2}\left(AH + AB\right)$$

Các phương pháp chứng minh hình bình hành:

Phương pháp 1: Tứ giác có các cạnh đối song song.

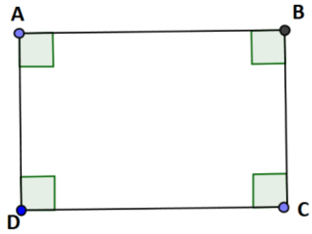
Phương pháp 2: Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau.

Phương pháp 3: Tứ giác có các cạnh đối song song và bằng nhau.

Phương pháp 4: Tứ giác có các góc đối bằng nhau.

Phương pháp 5: Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

1.7. Hình chữ nhật:



Định nghĩa: Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.

Chu vi hình chữ nhật:

$$C_{ABCD} = 2\left(AB + BC\right) = 2\left(AD + DC\right)$$

Diện tích hình chữ nhật:

$$S_{ABCD} = AB.CD$$

Các phương pháp chứng minh hình chữ nhật:

Phương pháp 1: Tứ giác có ba góc vuông.

Phương pháp 2: Hình thang cân có một góc vuông.

Phương pháp 3: Hình bình hành có một góc vuông.

Phương pháp 4: Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau.

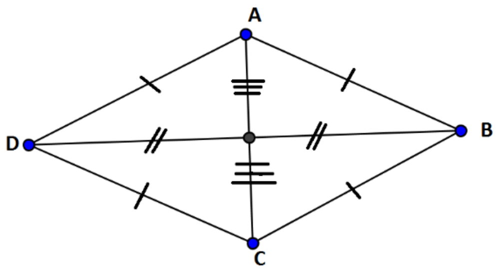
1.8. Hình thoi

Định nghĩa: Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Tính chất:

Trong hình thoi: Hai đường chéo vuông góc với nhau.

Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.



Chu vi hình thoi:

$$C_{ABCD} = 4AB = 4BC = 4CD = 4DA$$

Diện tích hình thoi:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = BO.AC = OD.AC$$

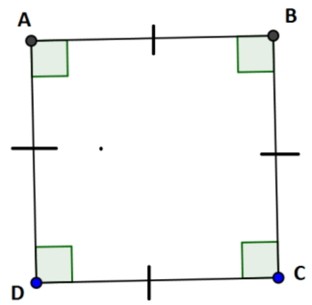
Các phương pháp chứng minh hình thoi:

Phương pháp 1: Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Phương pháp 2: Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau.

Phương pháp 3: Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Phương pháp 4: Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc.



1.9. Hình vuông

Định nghĩa: Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau.

Tính chất:

Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

Chu vi hình vuông:

$$C_{ABCD} = 4AB = 4BC = 4CD = 4DA$$

Diện tích hình vuông:

$$S_{ABCD} = AB^2 = BC^2 = CA^2 = DA^2$$

Phương pháp chứng minh hình vuông:

Phương pháp 1: Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau.

Phương pháp 2: Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Phương pháp 3: Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc.

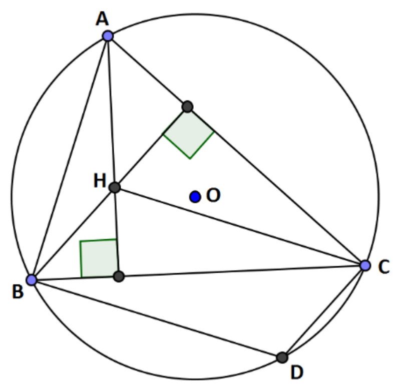
Phương pháp 4: Hình thoi có một góc vuông.

Phương pháp 5: Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau.

2. Bài tập áp dụng:

Th. S: Phạm Ngọc Tưởng
Facebook: www.facebook.com/2222hn

Bài tập 1: Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. D là một điểm trên cung BC không chứa điểm A. Xác định vị trí của điểm D để tứ giác BHCD là hình bình hanh.



Giải.

Giả sử đã tìm được điểm D trên cung BC sao cho tứ giác BHCD là hình

bình hành.

Khi đó: BD // HC và CD // HB.

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên CH $\perp$ AB và BH $\perp$ AC.

=> BD $\perp$ AB và CD $\perp$ AC.

Do đó:

$ABD = 90^0$ và $ACD = 90^0$

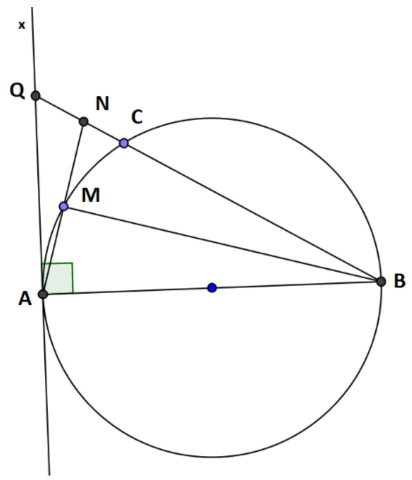
Vậy AD là đường kính của đường tròn tâm O

Ngược lại nếu D là đầu đường kính AD của đường tròn tâm O thì tứ giác

BHCD là hình bình hành.

Bài tập 2: Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R và C là một điểm thuộc đường tròn $(C \neq A, C \neq B)$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C. Kẻ tia Ax tiếp xúc với đường tròn (O), gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC. Tia BC cắt Ax tại Q , tia AM cắt BC tại N. Chứng minh các tan giác BAN và tam giác MCN cân.

Giải



Xét tam giác ABM và tam giác NBM, ta có:

AB là đường kính.

Nên $ABD = NMB = 90^0$

M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC nên

$ABM = MBN = 90^0 \Rightarrow BAM = BNM$

Tam giác BAN cân tại đỉnh B.

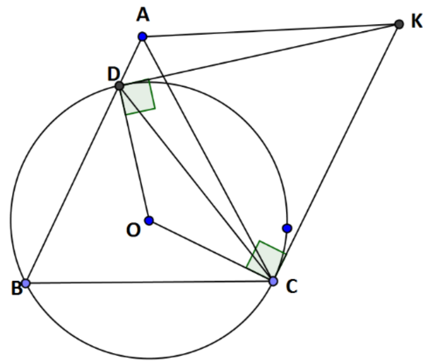
Xét tứ giác AMCB nội tiếp:

Suy ra $BAM = MNC$ cùng bù với MCB

Suy ra $MCN = MNC$ cùng bằng BAM

Tam giác MCN cân tại đỉnh M.

Bài tập 3: Cho tam giác ABC cân tại A, (AB > BC). Điểm D di động trên cạnh AB, (D không trùng với A, B). Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Tiếp tuyến của (O) tại C và D cắt nhau ở K.



a) Chứng minh tứ giác ADCK nội tiếp?

b) Tứ giác ABCK là hình gì? Vì sao?

c) Xác định vị trí điểm D sao cho tứ giác ABCK là hình bình hành?

Giải

c) Theo câu b, tứ giác ABCK là hình thang.

Do đó, tứ giác ABCK là hình bình hành.

Tương đương AB // CK

Tương đương $BAC = ACK$

Mà $ACK = \frac{1}{2}\text{sđ}\, EC = \frac{1}{2}\text{sđ}\, BD = DCB$

Nên $BCD = BAC$

Dựng tia Cy sao cho $BCy = BAC$

Khi đó, D là giao điểm của AB và Cy.

Với giả thiết $AB > BC$ thì $BCA > BAC > BDC$

Suy ra $D \in AB$.

Vậy điểm D xác định như trên là điểm cần tìm.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O. D và E lần lượt là điểm chính giữa của các cung AB và AC. DE cắt AB ở I và cắt AC ở L.

a) Chứng minh DI = IL = LE.

b) Chứng minh tứ giác BCED là hình chữ nhật.

c) Chứng minh tứ giác ADOE là hình thoi và tính các góc của hình này.

Bài tập 2:Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn có các đường chéo vuông góc với nhau tại I.

a) Chứng minh rằng nếu từ I ta hạ đường vuông góc xuống một cạnh của tứ giác thì đường vuông góc này qua trung điểm của cạnh đối diện của cạnh đó.

b) Gọi M, N, R, S là trung điểm của các cạnh của tứ giác đã cho. Chứng minh MNRS là hình chữ nhật.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật này đi qua chân các đường vuông góc hạ từ I xuống các cạnh của tứ giác.

Bài tập 3:Cho tam giác vuông ABC ($A = 1v$) có AH là đường cao. Hai đường tròn đường kính AB và AC có tâm là O_1 và O_2. Một cát tuyến biến đổi đi qua A cắt đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh tam giác MHN là tam giác vuông.

b) Tứ giác MBCN là hình gì?

c) Gọi F, E, G lần lượt là trung điểm của O_1O_2, MN, BC. Chứng minh F cách đều 4 điểm E, G, A, H.

d) Khi cát tuyến MAN quay xung quanh điểm A thì E vạch một đường như thế nào?

Bài tập 4:Cho hình vuông ABCD. Lấy B làm tâm, bán kính AB, vẽ 1/4 đường tròn phía trong hình vuông.Lấy AB làm đường kính , vẽ 1/2 đường tròn phía trong hình vuông. Gọi P là điểm tuỳ ý trên cung AC (không trùng với A và C). H và K lần lượt là hình chiếu của P trên AB và AD, PA và PB

cắt nửa đường tròn lần lượt ở I và M.

a) Chứng minh I là trung điểm của AP.

b) Chứng minh PH, BI, AM đồng qui.

c) Chứng minh PM = PK = AH

d) Chứng minh tứ giác APMH là hình thang cân.

đ) Tìm vị trí điểm P trên cung AC để tam giác APB là đều.

Bài tập 5: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ AB lấy một điểm M. Đường thẳng qua A song song với BM cắt CM tại N. Chứng minh rằng tam giác AMN là tam giác đều.

Bài tập 6: Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O; R) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Gọi M là trung điểm của AB. Tia CM cắt đường tròn tại điểm N. Tia AN cắt đường tròn tại điểm D.

a) Chứng minh rằng MB^2 = MC. MN

b) Chứng minh rằng AB// CD

c) Tìm điều kiện của điểm A để cho tứ giác ABDC là hình thoi. Tính diện tích cử hình thoi đó.